# Descrierea Soluțiilor
# Concursul Național “InfoPro”, Runda 2
# Grupa B

## 1 Problema Crescator

*Propunător: Alexandra Udriștoiu, studentă Universitatea din București*

### 1.1 Soluție O($N^2$)

Se calculează folosind programare dinamică $D[i][j]$ = numărul de moduri de a completa primele $i$ poziții din șirul $b$ astfel încât $b_i = j$. $D[i][j] = \sum D[i-1][k]$, unde $k < j$ dacă $b_i$ poate lua valoarea $j$ sau $D[i][j] = 0$, altfel. Această soluție obține aproximativ 35 de puncte.

### 1.2 Soluție O($N$)

Se observă că se pot număra separat subsecvențele crescatoare din $b$ cuprinse între două valori poziții cu valori pozitive din șirul $a$. Rezultatul final se calculează prin înmulțirea valorilor aflate.

Fie $i$ și $j$ ($i < j$) două poziții astfel încât $a_i > 0$ și $a_j > 0$ și între ele nu se mai află altă valoare pozitivă. Numărul de subsecvențe crescătoare de la $i$ la $j$ este egal cu numărul de șiruri crescătoare cu $i + j - 1$ elemente cu valori cuprinse între 1 și $a_j - a_i + 1$. Numărul de șiruri crescătoare cu $n$ elemente cu valori de la 1 la $k$ este $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Dacă între pozițiile $i$ și $j$ există o poziție $k$ astfel încât $a_k < 0$, atunci din rezultatul obținut anterior trebuie scăzut numărul de subsecvențe pentru care $b_k = -a_k$. Acestea se pot număra folosind observațiile din paragraful precedent, calculând separat numărul de subsecvențe crescătoare de la $i$ la $k$ și de la $k$ la $j$.

Complexitatea acestei soluții este O($N$) sau O($NlogN$), în funcție de modul de calcul al combinărilor și al inversului modular, și obține 100 de puncte.

## 2 Problema Maxime

*Propunător: profesor Marius Nicoli, Colegiul Național "Frații Buzești", Craiova*

Pentru început stabilim fiecărei poziții din șirul dat (șir numit V) unul dintre tipurile:

1 – valoare care schimbă maximul la o parcurgere de la stânga la dreapta;

2 – valoare egală cu maximul la o parcurgere de la stânga la dreapta, dar nu prima apariție a maximului;

3 – celelalte valori.

Calculăm $rep$ = *valoarea de afișat dacă nu s-ar elimina niciun element.*

Dacă interogarea este la o poziție de tip 3 se va afișa $rep$.

Dacă interogarea este la o poziție de tip 2 se va afișa $rep - 1$.

Dacă interogarea este la o poziție de tip 1 (deci care schimbă maximul), lucrurile sunt puțin mai complicate.

Să analizăm exemplele

3 3 6 6 9 3 6 6 6 5 6 10
3 3 6 6 9 3 7 7 6 8 8 10

Presupunem că avem interogare la poziția 5, adică îl eliminăm pe 9. Observăm că dacă 9 ar rămâne, niciuna dintre valorile dintre 9 și 10 nu ar conta (valabil în ambele exemple).

În primul exemplu, prin eliminarea lui 9 cele 4 valori de 6 (aflate între 9 și 10 și egale cu maximul de dinaintea lui 9) sunt importante, se vor număra.

În al doilea exemplu, după eliminarea lui 9, apare ulterior maxim ca fiind valoarea 7 și al doilea 7 este deci important, ba chiar și 8 este important, schimbându-se iarăși maximul.

Așadar, dacă elementul de eliminat (de la poziția P) este o primă apariție a maximului, devine importantă prima poziție de după P cu valoarea mai mare sau egală decât maximul anterior (de dinaintea celui de pe poziția P).

Să notăm R această poziție.

Astfel, dacă la poziția R este o valoare egală cu "maximul anterior", soluția este $rep – D[P] + D[R] + 1$ iar dacă la poziția R avem valoare strict mai mare decât "maximul anterior" soluția este $rep – D[P] + D[R]$.

Adunarea lui 1 este pentru a contoriza, în primul caz, și elementul de la poziția r.

Nu am spus cine este D. $D[i]$ = numărul de contorizări care se fac până la final dacă se schimbă maximul la poziția i. Calculul valorii lui $D[i]$ se face astfel:

Dacă prima valoare aflată după poziția i și care este mai mare sau egală cu $V[i]$ (să spunem că este la poziția j) este chiar egală cu $V[i]$, atunci $D[i] = 1 + D[j]$.

Dacă valoarea este strict mai mare ca $D[i]$, atunci $D[i] = D[j]$.

Să determinăm, pentru o poziție dată i, prima poziție j cu $j > i$ și $V[j] >= V[i]$, vom parcurge șirul de la dreapta spre stânga și vom folosi o stivă.

Algoritmul prezentat are timp de rulare de ordinul: numărul de elemente din șirul dat + numărul de interogări.

# 3 Problema Nfrac

*Propunător: profesor Ciprian Cheșcă, Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil", Buzău*

## 3.1 Varianta 1 ("brute force")

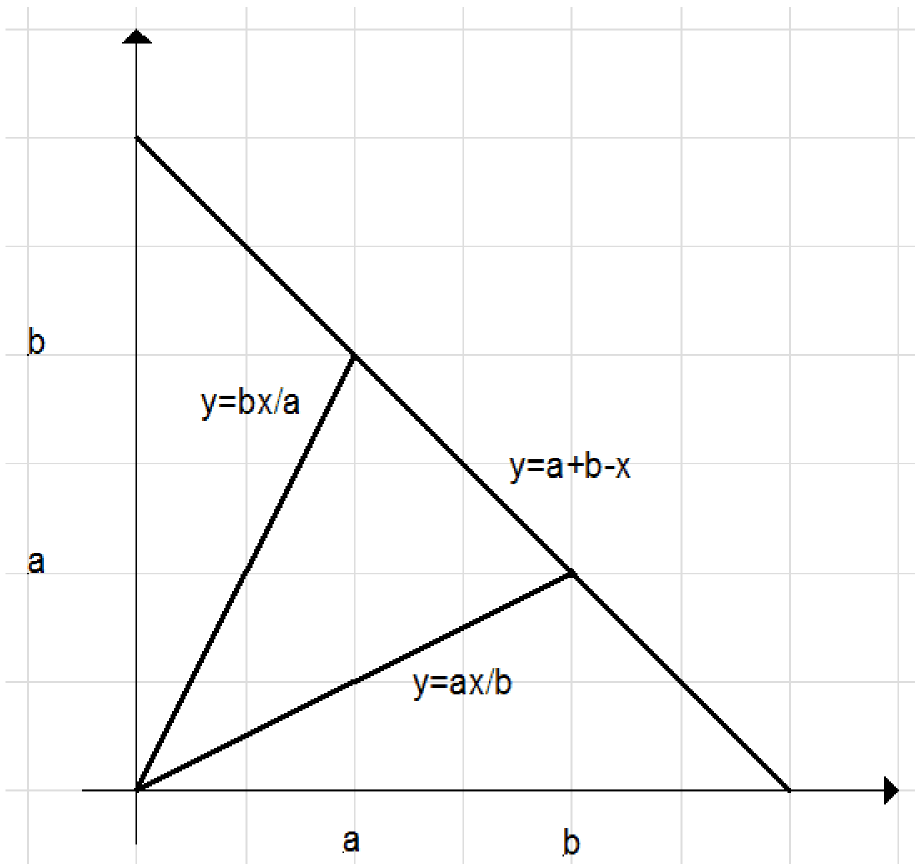
Se generează toate perechile de numere naturale $(x, y)$ cu proprietățile cerute de enunțul problemei cu ajutorul a două instrucțiuni repetitive $for$.

```
k=0;
for(x = 1; x <= a + b; x++)
    for(y = 1; y <= a + b - x; y++)
        if (a*y<=b*x && b*y>=a*x)
            k++;
```

Ordinul de complexitate al soluției este $O(T * (a + b)^2)$ și soluția obține aproximativ 20% din punctaj.

## 3.2 Varianta 2 (geometrie + baleiere pe orizontală sau verticală)

Condițiile din enunțul problemei se mai scriu astfel: $y \leq \frac{xa}{b}$ și $y \geq \frac{xb}{a}$. Ecuațiile $y = \frac{ax}{b}$ și $y = \frac{bx}{a}$ au drept reprezentare grafică două drepte ce trec prin origine cu pantele $\frac{a}{b}$ respectiv $\frac{b}{a}$. Ecuația $x + y = a + b$ are ca reprezentare grafică dreapta ce trece prin punctele $(a, b)$ și $(b, a)$ iar ecuația $x + y = 2$ are ca reprezentare grafică o dreaptă ce trece prin punctul de coordonate $(1, 1)$ și este paralelă cu dreapta $x + y = a + b$. Așadar punctele din plan care se găsesc sub dreapta de ecuație $y = \frac{bx}{a}$, deasupra dreptei de ecuație $y = \frac{ax}{b}$, sub dreapta de ecuație $x + y = a + b$ și deasupra dreptei de ecuație $x + y = 2$ sunt soluțiile problemei. Având în vedere că lucrăm numai cu numere naturale, numărul soluțiilor este egal cu numărul de puncte de coordonate naturale (laticiale) situate în această zonă (vezi figura alăturată)




Pentru a număra aceste puncte se poate face o baleiere pe orizontală (sau pe verticală) pentru toate valorile lui $y$ cuprinse între 1 și $a$ în prima etapă și în a doua etapă cu toate valorile lui $y$ cuprinse între $a+1$ și $b$. Valoarea lui $x$ se calculează din intersecțiile dreptelor din figură. Ordinul de complexitate al soluției este $O(T * b)$ și soluția obține aproximativ 40% din punctaj.

### 3.3 Varianta 3 (Complexitate $O(T * (a+b))$)

*profesor Ionel–Vasile Piț-Rada, Colegiul Național "Traian", Drobeta Turnu – Severin*

Notăm $a+b$ cu $s$ și din enunțul problemei avem de respectat condițiile: $1 \leq \frac{a}{b} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{a}$ și $2 \leq x+y \leq a+b$ Observăm că numărarea se poate face în trei pași: numărăm fracțiile $\frac{x}{y}$ cu $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y} < 1$ și obținem numărul $t$. Numărăm fracțiile $\frac{x}{y}$ cu $1 < \frac{x}{y} \leq \frac{b}{a}$, care sunt tot $t$. Numărăm fracțiile $\frac{x}{y} = 1$ și aici avem $\frac{a+b}{2}$ (fracțiile $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, ...$) Deci avem în total $nr = 2t + [\frac{s}{2}]$ fracții. Pentru a calcula $t$ am observat că putem avea doua situații:

- $1 \leq x \leq a$, când avem și $x < y \leq \frac{bx}{a}$ și aici avem în total $[\frac{bx}{a}] - x$ soluții

- $a+1 \le x \le \frac{a+b-1}{2}$, când avem și $x < y \le a+b-x$ și aici avem $a+b-x-x$ adică $s-2x$ soluții, care se adună toate la $t$.

### 3.4 Varianta 4 (geometrie + teorema lui Pick)

Se păstrează interpretarea geometrică a inegalităților de la varianta 2 și se adaugă utilizarea teoremei lui Pick pentru a determina numărul de puncte din interior triunghiului. Se calculează întâi numărul de puncte de pe laturile triunghiului ca fiind $1 + cmmdc(a, b)$ pe laturile de ecuații $y = \frac{ax}{b}$ și $y = \frac{bx}{a}$, respectiv $1 + (b–a)$ pe latura de ecuație $x + y = a + b$. Se calculează aria triunghiului prin împărțire în figuri geometrice simple ca find $\frac{b^2-a^2}{2}$. Se aplică apoi teorema lui Pick pentru a determina numărul de puncte din interiorul triunghiului. Numărul căutat este egal cu numărul punctelor din interiorul triunghiului adunat cu numărul de puncte de pe laturile acestuia din care se scade un punct (originea). Soluția are ordinul de complexitate proporțional cu cel al algoritmului lui Euclid (adică logaritmic) și obține 100% din punctaj.

**Echipa** care a pregătit setul din probleme pentru această rundă a fost formată din:

- studentă Alexandra - Maria Udriștoiu, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București.
- student Alexandru Petrescu, University of Oxford, Keble College.
- student Adrian-Emanuel Dicu, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Politehnica din București.
- profesor Ionel-Vasile Piț-Rada, Colegiul Național ”Traian”, Drobeta-Turnu Severin.
- profesor Ciprian Cheșcă, Liceul Tehnologic ”Grigore C. Moisil”, Buzău.
- profesor Marius Nicoli, Colegiul Național ”Frații Buzești”, Craiova.
- profesor Eugen Nodea, Colegiul Național ”Tudor Vladimirescu”, Târgu-Jiu.
- profesor Dan Pracsiu, Liceul Teoretic ”Emil Racoviță”, Vaslui.