Descrierile soluțiilor

Secvente

prof. Flavius Boian
Colegiul Național „Spiru Haret" Târgu Jiu

Soluție **100** de puncte - Complexitate O(N)

Dacă șirul nu conține cel puțin **`2*t`** valori egale cu **`1`**, atunci cele două subsecvențe nu se pot forma și se va afișa **`-1`**. În caz contrar, problema se reduce la găsirea a două subsecvențe disjuncte de lungime **`t`** din șirul **`S`** care conțin număr maxim de valori egale cu **`1`.** Complexitatea dorită este **`O(n)`** .

În acest scop vom construi în timp liniar doi vectori auxiliari **`V`** și **`VM`**:

```
V[i] = S[1] + S[2] + … + S[i] pentru i ≥ 1;
VM[i] = max(V[t], V[t + 1] - V[1], …, V[i] - V[i - t]) pentru i ≥ t.
```

Acum putem calcula pentru fiecare indice **`i`** `(t ≤ i ≤ n − t)` numărul maxim de valori de **`1`** cuprinse de cele doua subsecvențe alese astfel: subsecvența cu cele mai multe elemente de **`1`** de până la poziția **`i`** (inclusiv i) și subsecvența care începe pe poziția **`i + 1`** și se încheie pe poziția **`i + t`**. Vom folosi formula

```
VM[i] + (V[i + t] - V[i]).
```

Numărul maxim, **`mx`**, de valori de **`1`** cuprinse de cele doua subsecvențe va fi egal cu rezultatul maxim dintre cele calculate anterior. Numărul minim de interschimbări necesare va fi egal cu **`2*t - mx`**, întrucât pentru fiecare valoare egală cu **0** din cele două subsecvențe va fi necesară câte o interschimbare.

Pitici

prof. Daniela Lica
Centrul Județean de Excelență Prahova

Soluție **100** de puncte - Complexitate O(NlogN)

Considerăm piticul `i` (1≤ `i` ≤ `N`).
Pentru a determina la care casă se va opri din alergare, ar trebui să determinăm cel mai mic indice `j` pentru care suma `A[i]+A[i+1]+A[i+2]+…+ A[j] ≥ B[i]`.
Fie `Sp` vectorul ce va reține sumele parțiale generate de elementele vectorului `A`. Notând cu `Sp[i] = A[1] + A[2] + … + A[i]` , atunci suma `A[i]+A[i+1]+…+ A[j]`, este egală cu `Sp[j]-Sp[i-1]`. Vom căuta binar în vectorul `Sp`, cel mai din stînga indice `j`, pentru care `Sp[j]-Sp[i-1] ≥ B[i]`.
Având determinat acest indice `j`, înseamnă că piticul `i` a sunat la toate casele din intervalul `[i,j]`.

Pentru a determina numărul maxim de ori de care s-a sunat la o casă, vom folosi artificiul lui Mars, și vom marca în vectorul `Fr[]` astfel: pentru fiecare pitic `i` având determinat indice `j` al ultimei case la care a sunat, vom marca doar două elemente în vector, respectiv `Fr[i]++` și `Fr[j+1]--`.
În final, pentru a determina de câte ori s-a sunat la fiecare casă vom genera în `Fr[]`sumele parțiale ale elementelor sale, iar soluția o reprezinta elementul maxim din vectorul `Fr[]` și numărul lui de apariții.
Această strategie are complexitatea O(N), spre deosebire de varianta în care, pentru fiecare pitic, s-ar marca toate casele la care a sunat.

Soluție **50** de puncte - Complexitate O(N^2)

Soluția care obține 50% din punctaj, determină liniar pentru fiecare fiecare pitic `i` cel mai mic indice `j` pentru care suma `A[i]+A[i+1]+A[i+2]+…+ A[j] ≥ B[i]`.

Cmmdc

stud. Bogdan Iordache
Universitatea din București

Soluție **20** de puncte - Complexitate $O(N^3 \log N)$

Considerăm toate tripletele de numere (a, b, c) distincte mai mici sau egale decât N. Verificăm, folosind algoritmul lui Euclid, pentru care dintre aceste triplete c este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b. Avem $O(N^3)$ pentru fixarea tripletelor, iar calculul cmmdc-ului se face în $O(\log N)$.

Soluție **50** de puncte - Complexitate $O(N^2 \log N)$

Având fixat c, știm că a și b trebuie să fie multipli ai acestuia. Putem astfel varia, pentru un c fixat, toate perechile de multipli, urmând să verificăm pentru care dintre acestea cmmdc-ul este chiar c. Pentru c dat exista $O(N^2/c^2)$ perechi de multipli, la care se mai pune calculul cmmdc-ului in $O(\log N)$. Astfel calculul complexității finale revine la: $O(N^2 \log N(1/1^2+1/2^2+...+1/N^2))$. Pentru N oricât de mare, suma din paranteză va fi mereu mai mică decât o valoare constantă. Avem, deci, complexitatea finală $O(N^2 \log N)$.

Soluție **100** de puncte - Complexitate $O(N \log N)$ – Bogdan Iordache

Putem calcula în timp constant, pentru orice c, suma produselor perechilor de multipli distincți ai lui c mai mici decât N (notăm cu `multiplii[c]`), astfel:

- multiplii lui c, mai mici ca N sunt: $c, 2*c, 3*c, ..., [N/c]*c$
- suma produselor de perechi se poate obtine din: $(c + 2*c + ... + [N/c]*c)^2 - (c^2 + 2^2*c^2 + ... + [N/c]^2*c^2)$
- adică: $c^2(1 + 2 + ... + [N/c])^2 - c^2(1^2 + 2^2 + ... + [N/c]^2)$
- folosim formulele de calcul pentru sume de numere consecutive, respectiv pătrate consecutive: $1+2+...+N = N(N+1)/2$, respectiv $1^2+2^2+...+N^2 = N(N+1)(2N+1)/6$.

Având aceste sume calculate, încercăm să calculăm suma produselor perechilor de numere distincte care au cmmdc-ul egal cu c (`cmmdc[c]`). Pentru un c dat, suma aceasta este egală cu suma produselor perechilor de multipli distincți ai lui c (calculată mai sus) de la care se scad produsele perechilor dintre acestea care nu au cmmdc-ul c (deci au cmmdc-ul un multiplu al lui c, mai mare decât c). Dacă avem deja calculate sumele pentru toți multipli lui c, formula devine:
`cmmdc[c] = multiplii[c] – cmmdc[2c] – cmmdc[3c] - ... cmmdc[[N/c]*c]`

Dacă calculăm valorile vectorului `cmmdc` în ordine descrescătoare, vom avea mereu determinate pentru un c, valorile tuturor multiplilor săi. La rezultat adunăm apoi `c*cmmdc[c]` Complexitatea devine astfel $O(N + N/2 + N/3 + ... + N/N) = O(N(1 + 1/2 + ... + 1/N)) = O(N \log N)$.

De remarcat că mai sus adunăm și triplete de forma $(m*c, c, c)$ sau $(c, m*c, c)$. Acestea se pot scădea cu ușurință la final în timp constant pentru fiecare c.

Soluție **100** de puncte - Complexitate $O(N \log N)$ – prof. Dana Lica

Observăm că pentru un c fixat, a și b sunt de forma $k1*c$, respectiv $k2*c$, unde $cmmdc(k1, k2) = 1$. Produsul corespunzător tripletului (a, b, c) este $c^3*k1*k2$. Sarcina de a calcula suma tuturor tripletelor pentru un c fixat se reduce la calculul sumei de produse a tuturor perechilor de numere prime între ele mai mici decât $[N/c]$.

Mai mult, dacă am ști pentru un K dat suma numerelor prime cu K mai mici decât K, suma perechilor de mai sus se poate calcula în $O(N/c)$.

Lemă Suma numerelor prime cu K mai mici decât K este K*phi(K)/2. Unde phi(K) este indicatorul lui Euler.
Demonstrație Dacă avem M < K, cmmdc(M, K) = 1, K-M este de asemenea prim cu K. Astfel, toate numerele prime cu K, mai mici decât K pot fi puse în perechi de sumă K. Cum avem phi(K) numere prime cu K, mai mici decât K, avem phi(K)/2 perechi de sumă K, astfel suma totală a numerelor prime cu K, mai mici decât K este K*phi(K)/2.

Complexitatea finală este dată de precalcularea indicatorului Euler pentru numerele de la 1 la N, în O(NlogN) folosind ciurul lui Eratostene și formula:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

unde produsul se face după divizorii primi p, ai lui n. Apoi pentru un c fixat, calculul sumei de produse ale tripletelor se face în O(N/c), deci în total acest pas are complexitatea O(N + N/2 + ... + N/c) deci tot O(NlogN).

Echipa care a pregătit setul din probleme pentru această rundă a fost formată din:
prof. Daniela Lica, Centrul Județean de Excelență Prahova, Ploiești
prof. Flavius Boian Colegiul Național „Spiru Haret" Târgu Jiu
prof. Dumitrașcu Octavian, Colegiul Naţional "Dinicu Golescu" Câmpulung Muscel
Stud. Bogdan Iordache – Universitatea Bucureşti
Stud. Florian Uşurelu – Universitatea Bucureşti